习题课 不定积分的计算方法

1. 求不定积分的基本方法

2. 几种特殊类型的积分

内容与要求

1、理解原函数、不定积分的概念及性质

2、熟悉不定积分的基本公式 (包括补充公式)

3、掌握不定积分的两类换元法

4、掌握分部积分法

5、会综合运用各种积分方法计算积分

6 、掌握三类特殊类型的函数的积分

一、 求不定积分的基本方法

1. 直接积分法

通过简单变形, 利用基本积分公式和运算法则求不定积分的方法 .

2. 换元积分法

$$\int f(x)\mathrm{d}x \underset{\text{第二类换元法}}{\overset{\text{第一类换元法}}{\rightleftarrows}} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

(代换: $x = \varphi(t)$)

(注意常见的换元积分类型)

3. 分部积分法 $\int uv'\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$

使用原则：1) 由 v' 易求出 v;

2) $\int u'v\,\mathrm{d}x$ 比 $\int uv'\mathrm{d}x$ 好求.

一般经验：按 “反, 对, 幂, 指, 三” 的顺序,

排前者取为 u , 排后者取为 v' .

基本形式

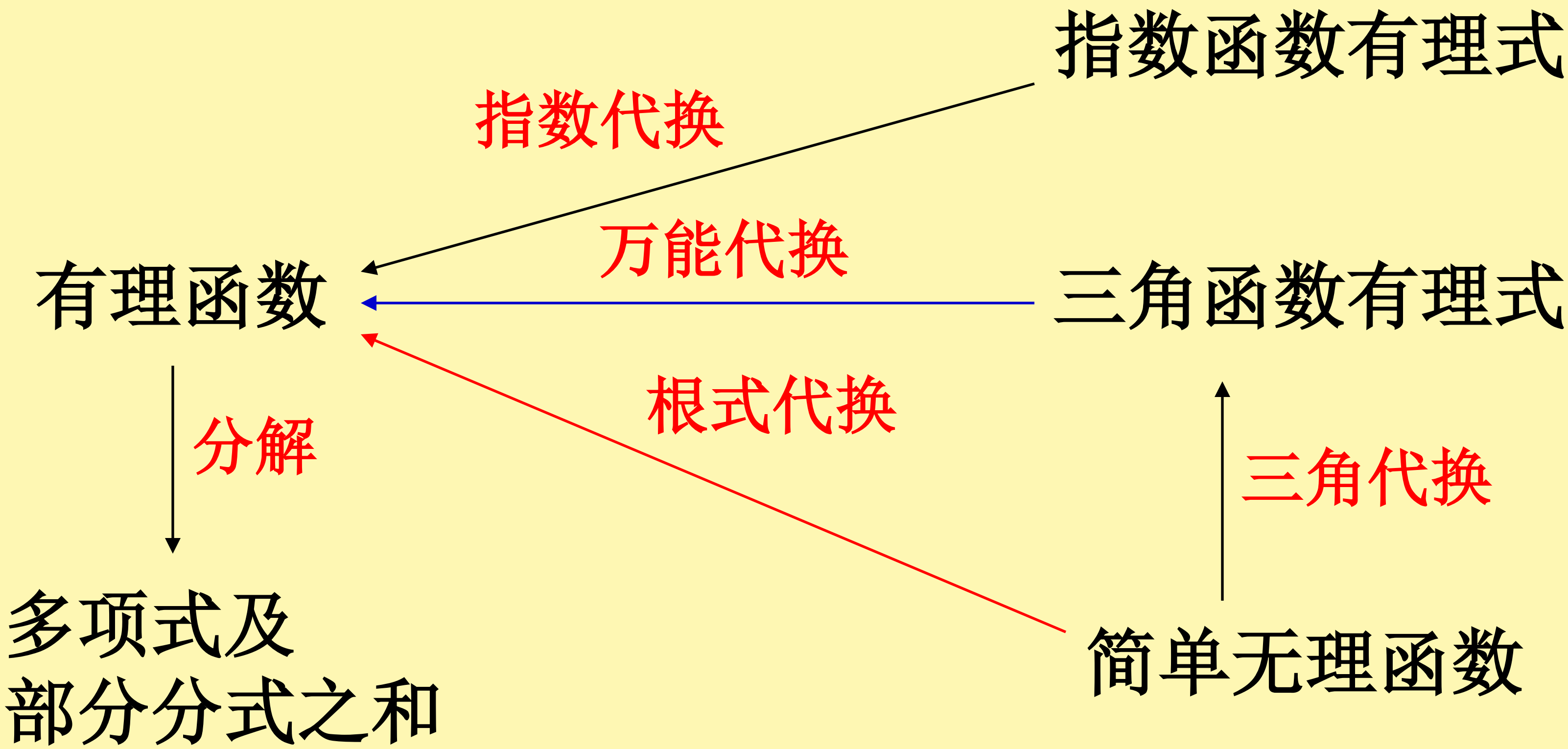
$$(i)\int x^n e^{ax}dx, \int P_n(x)\sin ax dx, \int P_n(x)\cos ax dx$$

$$(ii)\int x^n \ln x dx, \int x^n \arcsin x dx, \int P_n(x)\arctan dx$$

$$(iii)\int e^{ax}\cos bx x dx, \int e^{ax}\sin bx dx.$$

二、几种特殊类型的积分

1. 一般积分方法



2. 需要注意的问题

(1) 一般方法不一定是最简便的方法， 要注意综合使用各种基本积分法, 简便计算.

(2) 初等函数的原函数不一定是初等函数, 因此不一定都能积出.

例如, $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$, $\int \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$,

$\int \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$, $\int \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$,

$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \ (0<k<1)$, ……

3. 对一些常用的凑微分形式要熟悉.

(1)、$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)$

(2)、$\int x^{n-1}f(ax^n+b)dx=\frac{1}{na}\int f(ax^n+b)d(ax^n+b)$

(3)、$\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=2\int f(\sqrt{x})d\sqrt{x}$

(4)、$\int f(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}dx=-\int f(\frac{1}{x})d\frac{1}{x}$

(5)、$\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx=\int f(\ln x)d\ln x$,

$$\int f(a\ln x+b)\frac{1}{x}dx=\frac{1}{a}\int f(a\ln x+b)d(a\ln x+b)$$

(6)、$\int f(e^x)e^x dx = \int f(e^x)de^x$

$$\int f(ae^x + b)e^x dx = \frac{1}{a}\int f(ae^x + b)d(ae^x + b)$$

(7)、$\int f(\sin x)\cdot\cos x dx = \int f(\sin x)d\sin x$

$$\int f(\cos x)\cdot\sin x dx = -\int f(\cos x)d\cos x$$

$$\int f(\tan x)\cdot\sec^2 x dx = \int f(\tan x)d\tan x$$

(8)、$\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}dx = \int f(\arctan x)d\arctan x$

$$\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int f(\arcsin x)d\arctan x$$

NJUPT

4. 补充公式要熟记

(1) $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C;$

(2) $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C;$

(3) $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C;$

(4) $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C;$

(5) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C;$

(6) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

(8) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

5. 常用的代换:

(1) $t=\sqrt[n]{\quad}$.根式整体代换

(2) 三角代换

(i) $\sqrt{a^2-x^2}$ 可令 $x=a\sin t;\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

(ii) $\sqrt{a^2+x^2}$ 可令 $x=a\tan t;\ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

(iii) $\sqrt{x^2-a^2}$ 可令 $x=a\sec t.$

$x>a$时,$t\in(0,\frac{\pi}{2})$ $x<-a$时，令$x=-u$

(3) 倒代换 $x=\frac{1}{t}$

二、例题选讲

例1、选择与填空

1. $\int f(x)dx = \ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$，则$f'(x) =$ ______

解

2. 设$f(x)$的导函数为$\sin x$，则它的一个原函数为

$(A)\quad x+\sin x \qquad (B)\quad x-\sin x$

$(C)\quad x+\cos x \qquad (D)\quad x-\cos x$

解

例2 求 $\int \frac{2^x 3^x}{9^x + 4^x} \mathrm{d}x$.

例3 求$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$.

例4　求$\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$

例5 求 $\displaystyle\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$.

例6 求 $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

例7 求 $\int \frac{3\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\mathrm{d}x$.

例8 求

$$I_1=\int\frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x \text{ 及 } I_2=\int\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x .$$

例9　求 $\int \max\{1, |x|\} dx$.

例10 设 $F(x)$为$f(x)$的原函数,且 $F(0)=1$,当$x\geq 0$时有 $f(x)F(x)=\sin^2 2x$,$F(x)\geq 0$,求$f(x)$.